例 3.（2018 安庆市模考卷）设函数 $f(x)=e^x-ax-1$，其中 $a>0$.若函数 $f(x)$ 恰有一个零点，求 a 的值.

解析：“函数 $f(x)$ 恰有一个零点”等价于“$e^x=ax+1$ 有唯一实根”.

令 $h(x)=e^x$，$g(x)=ax+1$，显然曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=ax+1$ 均过点$(0,1)$. 作出图像知，只有当直线 $y=ax+1$ 为过点 $(0,1)$的曲线 $y=e^x$ 的切线时，曲线与直线才有唯一交点，即函数 $f(x)$ 恰有一个零点 $x=0$. 于是 $h'(0)=a$，所以 $a=1$.

注意：利用证明指数型灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1$ 的图像法解题.

例 4.（2017 课标Ⅱ卷）已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$，求实数 a 的值.

解析：函数 $f(x)$ 的定义域是$(0,+\infty)$. 因为 $f(x)=x(ax-a-\ln x)$，所以 $f(x)\geqslant 0$ 等价于 $ax-a-\ln x\geqslant 0$，即 $\ln x\leqslant ax-a$.

当 $x>1$ 时，$a\geqslant\dfrac{\ln x}{x-1}$. 由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1$ $(x>1)$，知 $\dfrac{\ln x}{x-1}<1$，因此 $a\geqslant 1$，当 $0<x<1$ 时，$a\leqslant\dfrac{\ln x}{x-1}$. 由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(0<x<1)$，知 $\dfrac{\ln x}{x-1}>1$，因此 $a\leqslant 1$. 当 $x=1$ 时，等号成立，$a\in\mathrm{R}$.

综上可知，实数 a 的值是 1.

注意：利用对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$的变式 $\dfrac{\ln x}{x-1}<1(x>1)$和 $\dfrac{\ln x}{x-1}>1(0<x<1)$解题.

5.3　$ae^x\geqslant x+1$ 和 $a\ln x\leqslant x-1$ 型

例 5.（2018 南通市模考卷）若函数 $f(x)=4x+4-me^x$ 在 R 上有零点，则实数 m 的取值范围是_______.

解析：函数 $f(x)=4x+4-me^x$ 在 R 上有零点就是，$4x+4-me^x=0$ 在 R 上有实数根，即 $m=\dfrac{4x+4}{e^x}$ 在 R 上有实数根. 再求函数 $\dfrac{4x+4}{e^x}$ 在 R 上的值域即可.

由指数型灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathrm{R})$知，$\dfrac{x+1}{e^x}\leqslant 1$，因此 $\dfrac{4x+4}{e^x}\leqslant 4$.

故实数 m 的值取值范围是$(-\infty,4]$.

注意：利用指数型灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathrm{R})$的变式 $\dfrac{x+1}{e^x}\leqslant 1(x\in\mathrm{R})$解题.

例 6.（2017 课标Ⅲ卷）已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$，求实数 a 的值.

解析：函数 $f(x)$的定义域是$(0,+\infty)$. $f(x)\geqslant 0$ 等价于$a\ln x\leqslant x-1$.

当 $x>1$ 时，$a\leqslant\dfrac{x-1}{\ln x}$. 由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1$ $(x>1)$，知 $\dfrac{x-1}{\ln x}>1$，因此 $a\leqslant 1$，当 $0<x<1$ 时，$a\geqslant\dfrac{x-1}{\ln x}$. 由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1$ $(0<x<1)$，知 $\dfrac{x-1}{\ln x}<1$，因此 $a\geqslant 1$，当 $x=1$ 时，等号成立，$a\in\mathrm{R}$.

综上可知，实数 a 的值是 1.

注意：利用对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$的变式 $\dfrac{x-1}{\ln x}>1(x>1)$和 $\dfrac{x-1}{\ln x}<1(0<x<1)$解题.

5.4　$e^{f(x)}\geqslant f(x)+1$ 和 $\ln g(x)\leqslant g(x)-1$ 型

例 7.（2018 广州市模考卷）若对任意实数 $x>0$，不等式 $tx+\ln x+1\leqslant xe^{2x}$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

解析：因为 $x>0$，所以不等式 $tx+\ln x+1\leqslant xe^{2x}$ 恒成立等价于 $t\leqslant\dfrac{xe^{2x}-\ln x-1}{x}$，即 $t\leqslant\left(\dfrac{xe^{2x}-\ln x-1}{x}\right)_{\min}$. 而 $xe^{2x}-\ln x-1=e^{\ln x+2x}-\ln x-1$. 由指数型灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1$ $(x\in\mathrm{R})$，知 $e^{\ln x+2x}\geqslant\ln x+2x+1$，当且仅当 $\ln x+2x=0$ 时等号成立，因此，$\dfrac{xe^{2x}-\ln x-1}{x}\geqslant\dfrac{\ln x+2x+1-\ln x-1}{x}=2$，当且仅当 $\ln x+2x=0$ 时取最小值 2. 于是 $t\leqslant 2$，即实数 t 的取值范围是$(-\infty,2]$.

注意：本题是将指数型灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1(x\in\mathrm{R})$中的 x 换为 $\ln x+2x$.若换 x 为 $f(x)$，则可以一般化为 $e^{f(x)}\geqslant f(x)+1$，扩大了应用范围.

例 8.（2017 黄冈市模考卷）方程 $\ln(x-2)=x+b$ 在$(2,+\infty)$内有唯一实数根的充要条件是（　　）

A. $b\leqslant -3$　　B. $b\geqslant -3$　　C. $b=3$　　D. $b=-3$

解析：由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$，得 $x+b=\ln(x-2)\leqslant x-2-1$，当且仅当 $x-2=1$，即 $x=3$ 时取等号. 因此，$\ln(x-2)=x+b$ 在$(2,+\infty)$内有唯一实数根的充要条件是 $3+b=\ln(3-2)$，即 $b=-3$. 故选 D.

注意：本题是将对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$中的 x 换为 $x-2$.若换 x 为 $g(x)$，则可以一般化为 $\ln g(x)\leqslant g(x)-1$，扩大了应用范围.

5.5　混合型 $e^{f(x)}-\ln g(x)\geqslant f(x)-g(x)+2$

例 9.（2013 课标卷）设函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$，若 $m\leqslant 2$，证明：$f(x)>0$.

解析：由对数型灵魂不等式 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$，得 $\ln(x+m)\leqslant x+m-1(x+m>0)$，即$-\ln(x+m)\geqslant -(x+m)+1(x+m>0)$. 与指数型核心灵魂不等式 $e^x\geqslant x+1$ 相加，得到 $e^x-\ln(x+m)\geqslant 2-m$，当且仅当 $x+m=1$ 且 $x=0$，即 $m=1$ 时等号成立.

因为 $m\leqslant 2$，当 $m\neq 1$ 时，$e^x-\ln(x+m)>2-m\geqslant 0$ $(x+m>0)$；当 $m=1$ 时，$e^x-\ln(x+1)=2-m=1>0(x+1>0)$. 因此，若 $m\leqslant 2$，有 $f(x)>0$ 成立.

注意：一般地，由 $\ln g(x)\leqslant g(x)-1$ 得到$-\ln g(x)\leqslant -g(x)+1$，与不等式 $e^{f(x)}\geqslant f(x)+1$ 相加，得 $e^{f(x)}-\ln g(x)\geqslant f(x)-g(x)+2$ $(g(x)>0)$，当且仅当 $f(x)=0$ 和 $g(x)=1$ 同时成立时，取等号.

例 10.（2016 杭州模考卷）若曲线 $f(x)=e^{2x+4}$ 与曲线 $g(x)=\ln(2x+\lambda)+1$ 有唯一公共点，求实数 λ 的值.